Mathematik Klasse 11c
Ganzrationale Funktionen
Abgabe bis 22.03.2020 (frau.elter@web.de)

Name:

Lösungen

Aufgabe 1: Wiederholung

1) Geben Sie den Grad n und die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ der folgenden Funktionen an.

i. $f(x) = -2x^3 + x - 4$

$$n = 3\,;\ a_3 = -2;\ a_1 = 1;\ a_0 = -4$$

ii. $f(x) = (2x-2)(4+3x^2)$

$$f(x) = 2x \cdot 4 + 2x \cdot 3x^2 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3x^2 = 8x + 6x^3 - 8 - 6x^2$$

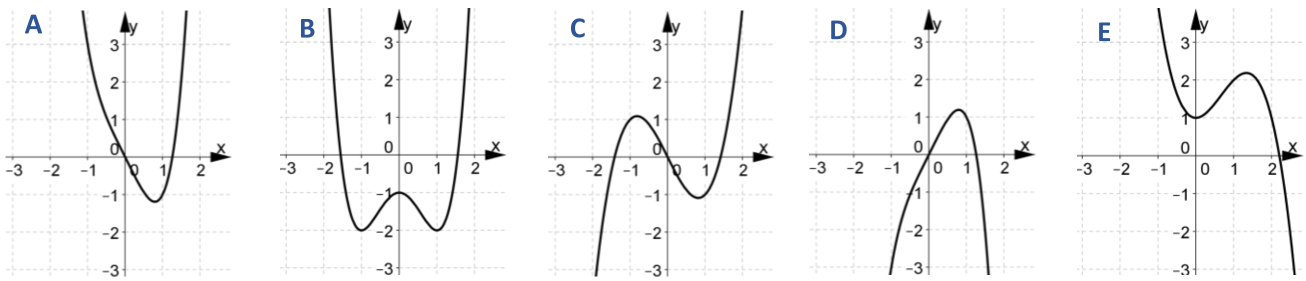
$$n = 3; a_3 = 6; a_2 = -6; a_1 = 8; a_0 = -8$$

iii. $f(x) = (2x^2 - 4)^2$

2. Binomische Formel: $f(x) = 4x^4 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 4 + 16 = 4x^4 - 16x^2 + 16$

$$n = 4; a_4 = 4; a_2 = -16; a_0 = 16$$

2) Ordnen Sie den Graphen die passenden Funktionsgleichungen zu und **begründen** Sie Ihre Entscheidung.



1 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ **2** $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$ **3** $f(x) = -x^4 + 2x$ **4** $f(x) = x^3 - 2x$ **5** $f(x) = x^4 - 2x$

Hinweis: Es werden verschiedene Begründungen zugelassen. Aus diesem Grund wurden die einzelnen Paare auf unterschiedliche Arten begründet. Sie können sich für einen Art der Formulierung entscheiden oder auch mischen.

1 – B: Der Grad der Funktion **1** ist gerade und der Leitkoeffizient positiv. Daraus folgt, dass für $x \to -\infty$ die Funktionswerte $f(x) \to +\infty$ gehen und für $x \to +\infty$ gehen die Funktionswerte $f(x) \to +\infty$. Es kommen demnach die Graphen **A** und **B** in Frage. Hinzukommt aber noch die Vergleichsfunktion für x nahe 0, die $y = 2x^2 - 1$ lautet. Dem entspricht eine nach unten geöffnete Parabel, die die y-Achse bei $y = -1$ schneidet. Also kommt nur **B** in Frage.

2 – E: Der Grad n der Funktion **2** ist ungerade und der Leitkoeffizient a_n ist negativ. Das heißt der Graph verläuft vom II. in den IV. Quadranten. Hinzu kommt, dass der Graph wegen $a_0 = 1$ die y-Achse bei $y = 1$ schneiden muss. Dem entspricht der Graph **E**.

3 – D: Da der Grad n der Funktion **3** gerade ist und der Koeffizient vor der höchsten x-Potenz negativ, verläuft der Graph von links unten nach rechts unten. Da die Vergleichsfunktion für x nach 0 $y = 2x$ lautet, geht der Graph durch den Ursprung. Das gilt nur für den Graphen **D**.

4 – C: Der Graph zur Funktion **4** muss vom III. in den I. Quadranten verlaufen, da die höchste x-Potenz ungerade ist und der zugehörige Koeffizient größer als Null. Das gilt nur bei **C**.

5 – A: Da der Grad gerade und der Leitkoeffizient positiv ist, verläuft der Graph vom II. in den I. Quadranten. Zusätzlich gilt $a_0 = 0$, weshalb der Graph durch den Ursprung läuft. Demnach kommt für die Funktionsgleichung **5** nur der Graph **A** in Frage.

Aufgabe 2: Symmetrieeigenschaften ohne Rechnung

Entscheiden Sie jeweils, ob f symmetrisch zur y-Achse oder zum Ursprung ist.

a) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 4$ symmetrisch zur y-Achse: Es treten nur die geraden Exponenten 4, 2 und 0 auf.

b) $f(x) = 2x^3 - x - 1$ weder noch: Es treten sowohl ungerade (3 und 1) als auch gerade (0) Exponenten auf

c) $f(x) = x^5 + 6x^7 - x$ punktsymmetrisch zum Ursprung: nur ungerade Exponenten (7, 5, 1)

d) $f(x) = 1 - x$ weder noch: gerader (0) und ungerader (1) Exponent

Aufgabe 3: Symmetrieeigenschaften mit Rechnung

Die Symmetrieeigenschaft einer Funktion lässt sich auch rechnerisch nachprüfen. Es gilt:

Der Graph einer reellen Funktion f mit dem Definitionsbereich D ist **achsensymmetrisch zur $\boldsymbol{y}$-Achse**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

Der Graph einer reellen Funktion f mit dem Definitionsbereich D ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn für alle $x \in D$ gilt: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen rechnerisch auf Symmetrie:

a) $f(x) = 0{,}5x^6 - 3x^2 + 11$

$f(-x) = 0{,}5(-x)^6 - 3(-x)^2 + 11 = 0{,}5x^6 - 3x^2 + 11 = f(x) \Rightarrow$ wegen $f(-x) = f(x)$ ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $f(x) = 2x^5 + 3x^3$

$f(-x) = 2(-x)^5 + 3(-x)^3 = -2x^5 - 3x^3 = (-1) \cdot (2x^5 + 3x^2) = -f(x) \Rightarrow$ wegen $f(-x) = -f(x)$ ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung

c) $f(x) = x^4 - 4x$

$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x) = x^4 + 4x \neq f(x)$ und $\neq -f(x) \Rightarrow$ wegen $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ ist der Graph weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung